电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

逻辑代数基础

- 概述
- 逻辑代数中的三种基本运算
- 逻辑代数的基本公式和常用公式
- 逻辑代数的基本定理
- 逻辑函数及其表示方法
- 逻辑函数的化简方法
- 具有无关项的逻辑函数及其化简

合肥工业大学

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

利用逻辑代数化简逻辑函数

- “与-或”式及“或-与”式

例如：$f(A,B,C)=\bar{A}BC+BC+AB\bar{C}$

“与-或”式：与项的逻辑或构成的逻辑函数

例如：$f(A,B,C)=(A+B+C)(B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+C)$

“或-与”式：或项的逻辑与构成的逻辑函数

这两种形式是逻辑函数最常用形式

合肥工业大学

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

利用逻辑代数化简逻辑函数

- 目的：减少实现指定逻辑函数的成本
- 成本的度量和其它考虑
  - 门的数量
  - 电路级的数量(时延)
  - 门的扇入和扇出
  - 互连结构的复杂性
  - 避免冒险
  - 引线数最少

合肥工业大学

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

利用逻辑代数化简逻辑函数

- 两级实现最简形式：

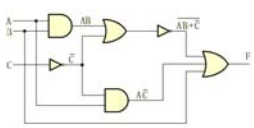
(1) 项数最少

(2) 在项数最少的条件下，项内变量数最少

1．“与-或”式的化简

例1：逻辑函数为：

$F=\overline{AB+\bar{C}}+A\bar{C}+B$



要求：1. 画出逻辑图

2.化简函数表达式

合肥工业大学

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

利用逻辑代数化简逻辑函数

- 化简步骤：

$F=\overline{AB+\bar{C}}+A\bar{C}+B$

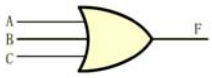
$=(\bar{A}+\bar{B})C+A\bar{C}+B$

$=\bar{A}C+\bar{B}C+A\bar{C}+B$

$=\bar{A}C+C+A\bar{C}+B$

$=C+A\bar{C}+B$

$=A+B+C$



合肥工业大学

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

利用逻辑代数化简逻辑函数

例2：$F=AB+A\bar{C}+\bar{B}C+\bar{C}B+\bar{B}D+\bar{D}B+ADE(F+G)$

$=A\overline{\bar{B}C}+\bar{B}C+\bar{C}B+\bar{B}D+\bar{D}B+ADE(F+G)$

$=A+\bar{B}C+\bar{C}B+\bar{B}D+\bar{D}B+ADE(F+G)$

$=A+\bar{B}C+\bar{C}B+\bar{B}D+\bar{D}B$

$=A+\bar{B}C(D+\bar{D})+\bar{C}B+\bar{B}D+\bar{D}B(C+\bar{C})$

$=A+\bar{B}CD+\bar{B}C\bar{D}+\bar{C}B+\bar{B}D+\bar{D}BC+\bar{D}B\bar{C}$

$=A+\bar{B}D+C\bar{D}+\bar{C}B$

合肥工业大学

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

利用逻辑代数化简逻辑函数

- 布尔代数化简的局限性：
  - 化简方法技巧性太强
  - 难以判断最后结果是否最简
- 卡诺图法可以较简便地得到最简结果

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

卡诺图化简法

1. 逻辑函数的最小项表达式

a. 最小项

对于n个变量的逻辑函数，它的“与”项如果包含n个文字，即每个变量以原变量或反变量的形式出现一次且仅出现一次，那么这个与项就称为该函数的最小项。

最小项	编码	编号
$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	000	m_0
$\overline{A}B\overline{C}$	010	m_2
$AB\overline{C}$	110	m_6
$\overline{A}BC$	011	m_3
ABC	111	m_7

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

逻辑函数的最小项表达式

如果函数的“与-或”式全由最小项组成，这个“与-或”式就叫规范的“与-或”式，或叫最小项表达式。

例如：

$$f(A,B,C)=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}+\overline{A}BC+ABC$$
$$=m_0+m_2+m_6+m_3+m_7$$
$$=\sum m(0,2,3,6,7)$$

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

逻辑函数的最小项表达式

例如：将函数 $F(A,B,C)=AB+\overline{A}C$ 写成最小项表达形式

$$F=AB+\overline{A}C$$
$$=AB(C+\overline{C})+\overline{A}C(B+\overline{B})$$
$$=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}\overline{B}C$$
$$=\sum^{3}m(1,3,6,7)$$

注意：最小项中的变量顺序

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

真值表与最小项表达式的关系

$$f_1(A,B,C)=\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+AB\overline{C}+ABC$$

$$\overline{f}_1(A,B,C)=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+A\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}C$$

行 数 (i)	输 入 ABC	输 出 $f_1(A,B,C)=\Sigma m(2,3,6,7)$	反函数输出 $\overline{f}_1(A,B,C)=\Sigma m(0,1,4,5)$
0	000	0	1 ← m_0
1	001	0	1 ← m_1
2	010	1 ← m_2	0
3	011	1 ← m_3	0
4	100	0	1 ← m_4
5	101	0	1 ← m_5
6	110	1 ← m_6	0
7	111	1 ← m_7	0

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

逻辑函数的最大项表达式

最大项：

对于n个变量的逻辑函数，它的“或”项如果包含n个文字，即每个变量以原变量或反变量的形式出现一次且仅出现一次，那么这个或项就称为该函数的最大项。

最大项	编码	编号
$A+B+C$	000	M_0
$A+B+\overline{C}$	001	M_1
$A+\overline{B}+C$	010	M_2
$A+\overline{B}+\overline{C}$	011	M_3
$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	111	M_7

逻辑函数的最大项表达式

如果函数的“或-与”式全由最大项组成，这个“或-与”式就叫规范的“或-与”式，或叫最大项表达式。

例如：

$$f(A,B,C)=\underbrace{(A+B+C)}_{000}\underbrace{(A+B+\overline{C})}_{001}\underbrace{(\overline{A}+B+C)}_{100}\underbrace{(\overline{A}+B+\overline{C})}_{101}$$

$$=M_0\bullet M_1\bullet M_4\bullet M_5$$

$$=\Pi M(0,1,4,5)$$

真值表与最大项表达式的关系

$$f(A,B,C)=(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}$$

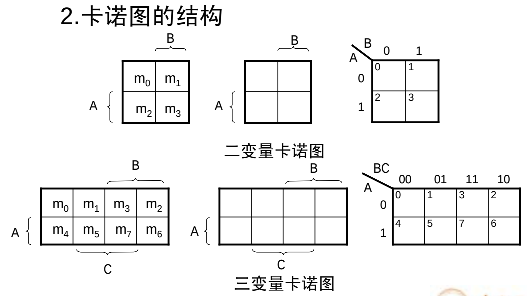
行 数 (i)	输入 ABC	输 出 $f(A,B,C)=\Pi M(1,3,5,7)=\Sigma m(0,2,4,6)$
0	000	1 m_0
1	001	0 ← M_1
2	010	1 m_2
3	011	0 ← M_3
4	100	1 m_4
5	101	0 ← M_5
6	110	1 m_6
7	111	0 ← M_7

习 题

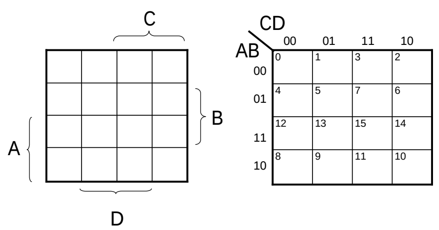
P61-62 题2.10、2.14、2.15

卡诺图

2.卡诺图的结构

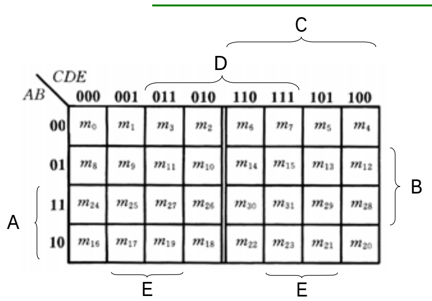


卡诺图



四变量卡诺图

卡诺图



五变量的卡诺图

卡诺图

3 卡诺图的构成特点：

- 卡诺图是真值表的二维形式。
- 每个最小项对应一个小方块，其下标对应的方块，或从变量所属区域直接寻找。
- 具有对称性：每个变量以原变量和反变量形式将卡诺图各分一半。
- 归属性：最小项对应的方块，一定属于各自组成的变量区域。

卡诺图

- 每个最大项对应2^n-1个小方块，即除去最大项下标对应的小方块以外的区域。
- 逻辑运算对应卡诺图的关系

"与" - 对应各自函数的公共区域（例如：最小项）

"或" - 对应各自函数区域的总和

"非" - 对应函数覆盖之外的区域

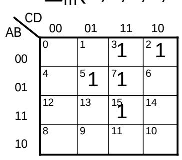
"异或" - 除两个函数相交部分，剩余各自和

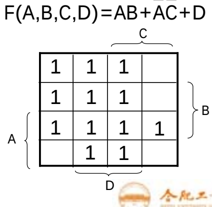
卡诺图

4 怎样用卡诺图表示逻辑函数：

"与-或"式
- 化函数为规范的"与-或"式，再利用下标直接填入卡诺图
- 直接填写法

例如：$F=\sum_m^4(2,3,5,7,15)$ $F(A,B,C,D)=AB+\bar{A}\bar{C}+D$





卡诺图

"或- 与"式同理可得以上两种对偶方法

5 卡诺图的一些重要性质

- 小方块的相邻（可以是大块相邻）
  - 相邻 – 有共同的边界
  - 相对 – 同行(或列)两端
  - 相重 – 两个相邻图对折位置相同的小方块

以上相邻的小方块只有一个变量不同的最小项，称为逻辑相邻。对于n个变量函数，每个小方块有n个相邻的小方块。

卡诺图的一些重要性质

- 块的合并：两个同一级别的相邻块(三种情况)，可以合并成一个较大块。

为了反映合并后块的不同级别，引入"维"的概念：

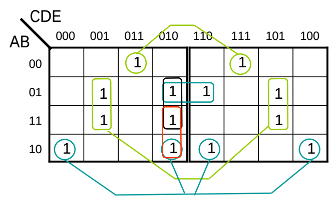
n维块	包含小方块数	相邻块数	n维"与"项	"与"项中变量数
0维块	2^0	n−0	0维与项	n−0
1维块	2^1	n−1	1维与项	n−1
2维块	2^2	n−2	2维与项	n−2
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·
n维块	2^n	0	n维与项	0

注：这里n为逻辑函数的变量数

卡诺图的一些重要性质

- 卡诺图上的极大块

定义：不能再合并的维块称为极大块，也就是说此维块不被其它维块包含，在卡诺图上用圈圈起来。



卡诺图的一些重要性质

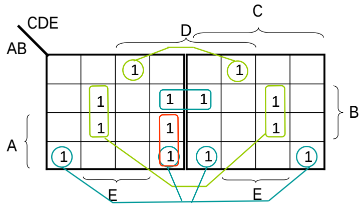
- 卡诺图的最小覆盖：用最少的极大块覆盖全部填1的块

寻找最小覆盖的原则：
- 产生所有的极大块
- 挑选出唯一包含0维块的所有极大块
- 其次尽量选择维块高的极大块
- 如果选择的极大块已被前面所选极大块覆盖，此块应丢掉

用卡诺图化简逻辑函数

例如：下列函数为最简“与-或”式

$F=\sum^5 m(3,7,9,10,13,14,16,18,20,22,25,26,29)$

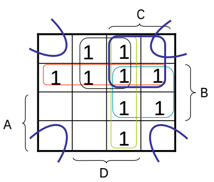


$F=\bar{A}\bar{B}DE+B\bar{D}E+\bar{A}BD\bar{E}+A\bar{B}\bar{E}+A\bar{C}D\bar{E}$

用卡诺图化简逻辑函数

例如：下列函数为最简“与-或”式和最简的“或-与”式

$F(A,B,C,D)=\bar{A}B\bar{C}+BC\bar{D}+BCD+CD+\bar{A}\bar{B}D$



$\bar{F}=A\bar{C}+\bar{B}\bar{D}$

运用反演规则

$F=(\bar{A}+C)(B+D)$

$F=\bar{A}B+CD+\bar{A}D+BC$

逻辑代数基础

- 概述
- 逻辑代数中的三种基本运算
- 逻辑代数的基本公式和常用公式
- 逻辑代数的基本定理
- 逻辑函数及其表示方法
- 逻辑函数的化简方法
- 具有无关项的逻辑函数及其化简

无关最小项

包含无关最小项的逻辑化简

在 2^n 个最小项中，一部分最小项并不能决定函数的值，我们把这些最小项称为无关最小项

无关最小项发生在两种情况：
- 输入某些组合不可能出现（约束项）
- 所有输入都可能出现，但其中部分输入对其输出并不关心（任意项）

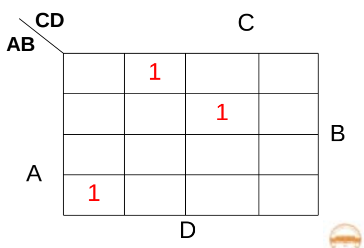
化简依据：逻辑函数加上或者去掉无关最小项，对原函数逻辑功能无影响

无关最小项化简

例：$Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C'D'$

给定约束条件为：

$A'B'CD+A'BC'D+ABC'D'+AB'C'D+ABCD+ABCD'+AB'CD'=0$



无关最小项化简

例：$Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C'D'$

给定约束条件为：

$A'B'CD+A'BC'D+ABC'D'+AB'C'D+ABCD+ABCD'+AB'CD'=0$

CD / AB　　C

0	1	x	0
0	x	1	0
x	0	x	x
1	x	0	x

B　A　D

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

无关最小项化简

例：$Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C'D'$

给定约束条件为：

$A'B'CD+A'BC'D+ABC'D'+AB'C'D+ABCD+ABCD'+AB'CD'=0$

CD / AB　　C　　$A'D$

0	1	x	0
0	x	1	0
x	0	x	x
1	x	0	x

B　A　AD'　D

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

无关最小项化简

例：$Y(A,B,C,D)=\sum m(2,4,6,8)$

约束项：$m_5+m_{10}+m_{11}+m_{12}+m_{13}+m_{14}+m_{15}=0$

CD / AB　　C

0	0	0	1
1	x	0	1
x	x	x	x
1	0	x	x

B　A　D

$Y = AD' + BD' + CD'$

电子科学与应用物理学院
School of Electronic Science & Applied Physics

习 题

P62-64 题2.16、2.17、

2.18、2.22、2.25